ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение взаимного положения прямой и плоскости - позиционная задача, для решения которой применяется ***метод вспомогательных секущих плоскостей***. Сущность метода заключается в следующем: через прямую проведем вспомогательную секущую плоскость γ и установим относительное положение двух прямых ***а*** и ***в,*** последняя из которых является линией пересечения вспомогательной секущей плоскости γ и данной плоскости α(рис.5.13).

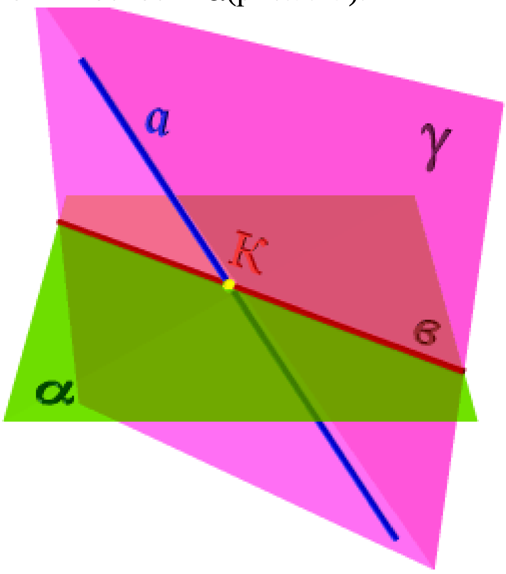


Рисунок 5.13. Метод вспомогательных секущих плоскостей

Каждому из трех возможных случаев относительного расположения этих прямых соответствует аналогичный случай взаимного расположения прямой и плоскости. Так, если обе прямые совпадают, то прямая **а** лежит в плоскости **α,** параллельность прямых укажет на параллельность прямой и плоскости и, наконец, пересечение прямых соответствует случаю когда прямая **а** пересекает плоскость **α.**

Таким образом возможны три случая относительного расположения прямой и плоскости:

- Прямая принадлежит плоскости;
- Прямая параллельна плоскости;
- Прямая пересекает плоскость, частный случай – прямая перпендикулярна плоскости.

Рассмотрим каждый случай.

Прямая линия, принадлежащая плоскости

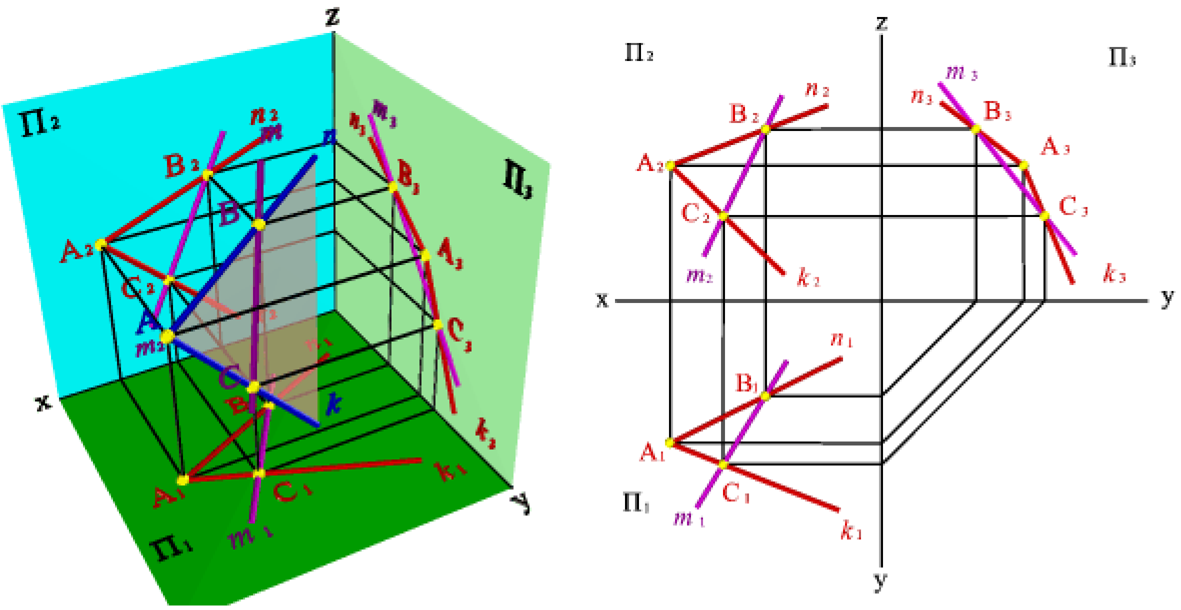
Аксиома 1. Прямая принадлежит плоскости, если две её точки принадлежат той же плоскости (рис.5.14).

Задача. Дана плоскость (***n***,***k***) и одна проекция прямой m_2.

Требуется найти недостающие проекции прямой ***m*** если известно, что она принадлежит плоскости, заданной пересекающимися прямыми ***n*** и ***k***.

Проекция прямой m_2 пересекает прямые ***n*** и ***k*** в точках B_2 и C_2, для нахождения недостающих проекций прямой необходимо найти недостающие проекции точек ***B*** и ***C*** как точек лежащих на прямых соответственно ***n*** и ***k***.

Таким образом точки ***B*** и ***C*** принадлежат плоскости заданной пересекающимися прямыми ***n*** и ***k***, а прямая ***m*** проходит через эти точки, значит согласно аксиоме прямая принадлежит этой плоскости.



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.14. Прямая и плоскость имеют две общие точки

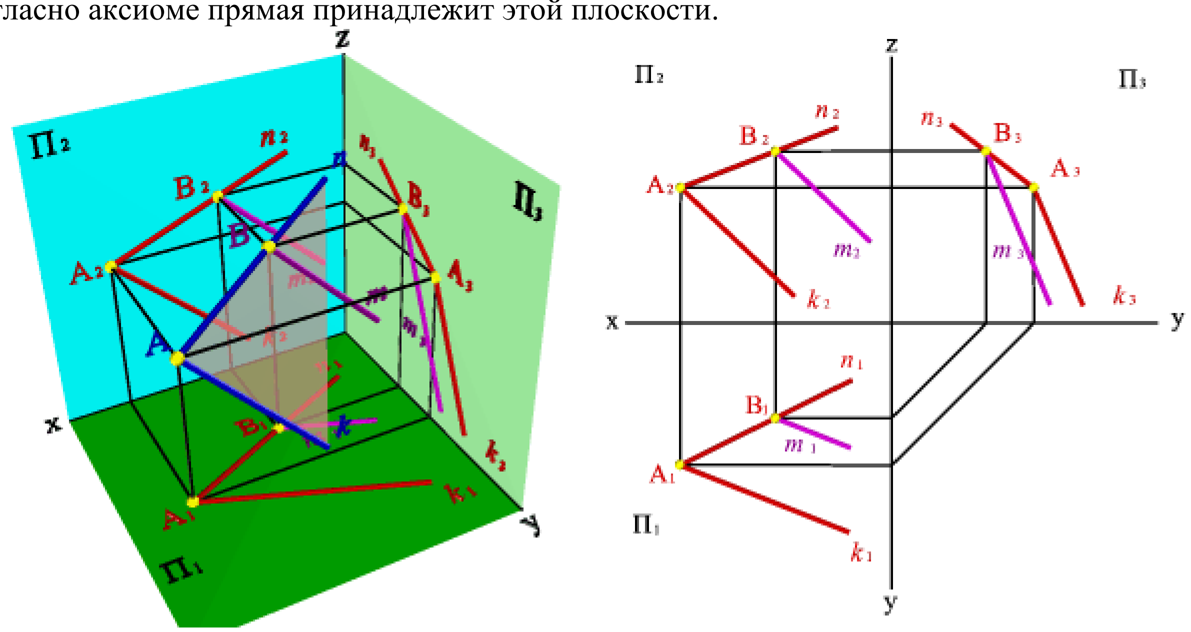
Аксиома 2. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой расположенной в этой плоскости (рис.5.15).

Задача.

Через точку ***B*** провести прямую ***m*** если известно, что она принадлежит плоскости заданной пересекающимися прямыми ***n*** и ***k***.

Пусть ***B*** принадлежит прямой ***n*** лежащей в плоскости заданной пересекающимися прямыми ***n*** и ***k***. Через проекцию $\boldsymbol{B_2}$ проведем проекцию прямой $\boldsymbol{m_2}$ параллельно прямой $\boldsymbol{k_2}$, для нахождения недостающих проекций прямой необходимо построить проекцию точки $\boldsymbol{B_1}$, как точки лежащей на проекции прямой $\boldsymbol{n_1}$ и через неё провести проекцию прямой $\boldsymbol{m_1}$ параллельно проекции $\boldsymbol{k_1}$.

Таким образом точки ***B*** принадлежат плоскости заданной пересекающимися прямыми ***n*** и ***k***, а прямая ***m*** проходит через эту точку и параллельна прямой ***k***, значит согласно аксиоме прямая принадлежит этой плоскости.



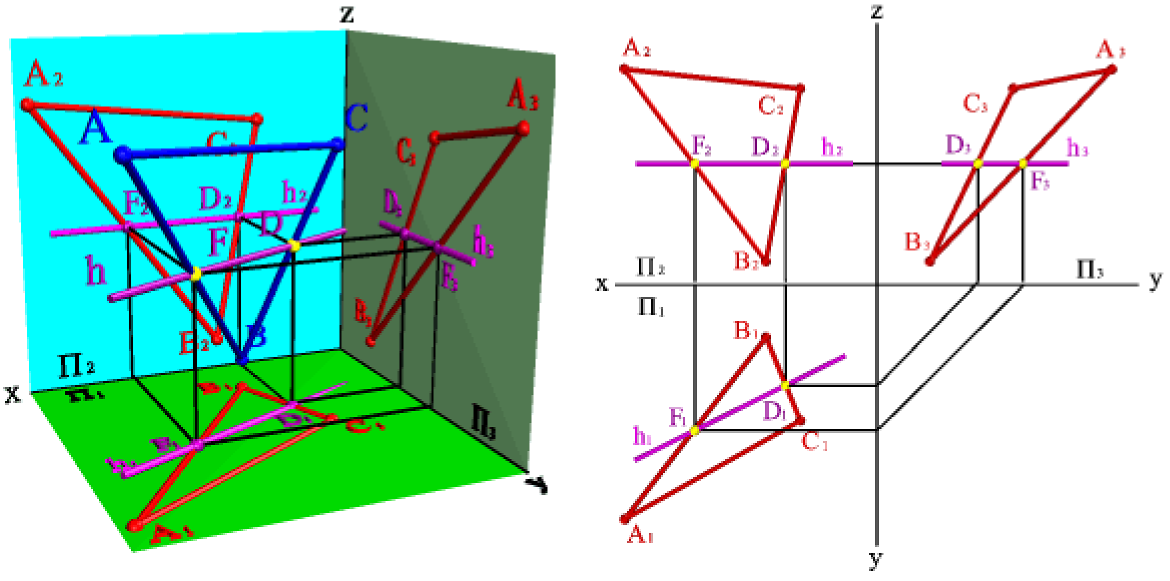
а) модель б) эпюр

Рисунок 5.15. Прямая имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна прямой расположенной в этой плоскости

Главные линии в плоскости

Среди прямых линий, принадлежащих плоскости, особое место занимают прямые, занимающие частное положение в пространстве:

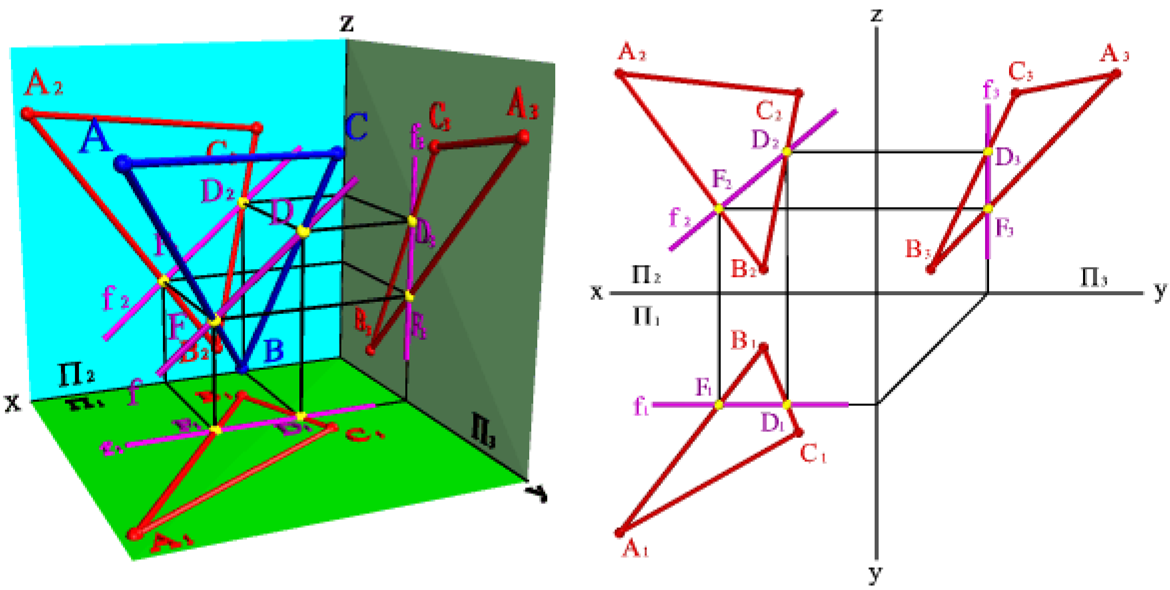
1. ***Горизонтали*** ***h*** - прямые, лежащие в данной плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (**$h \in ABC,\ h//\Pi_1,\ h_2//Ox, h_3//Oy$**)(рис.5.16).



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.16. Горизонталь

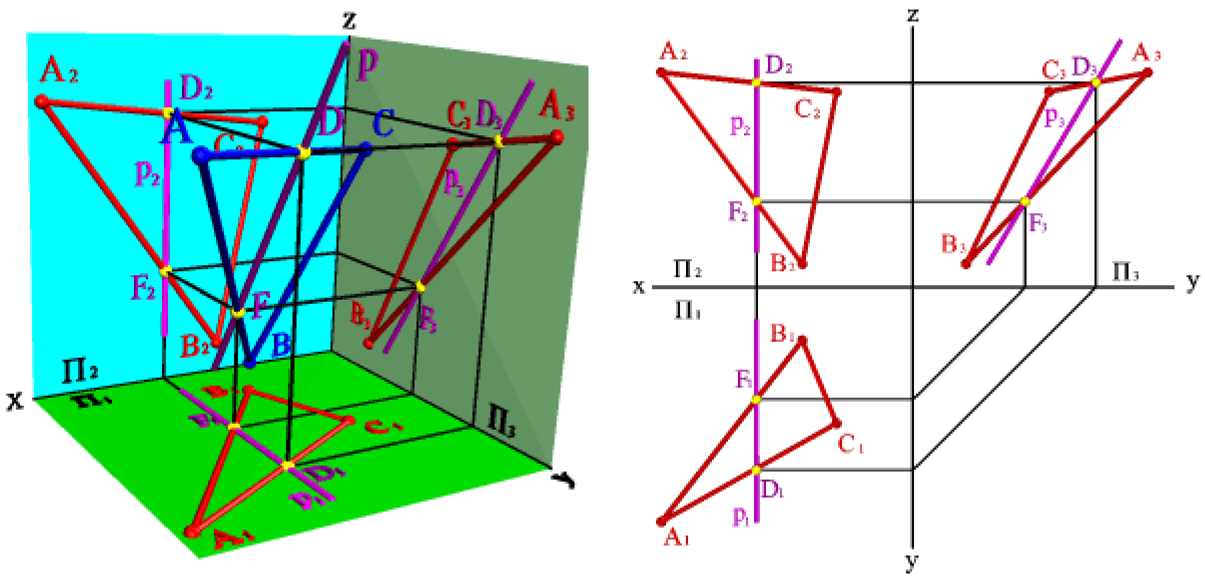
2. ***Фронтали*** ***f*** - прямые, расположенные в плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций (**$f \in ABC,\ f//\Pi_2,\ f_1//Ox,\ f_3//Oz$**)(рис.5.17).



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.17. Фронталь

3. ***Профильные прямые*** ***p*** - прямые, которые находятся в данной плоскости и параллельны профильной плоскости проекций (**$p \in ABC,\ p//\Pi_3,\ p_1 \perp Ox,\ p_2 \perp Ox$**) (рис.5.18).

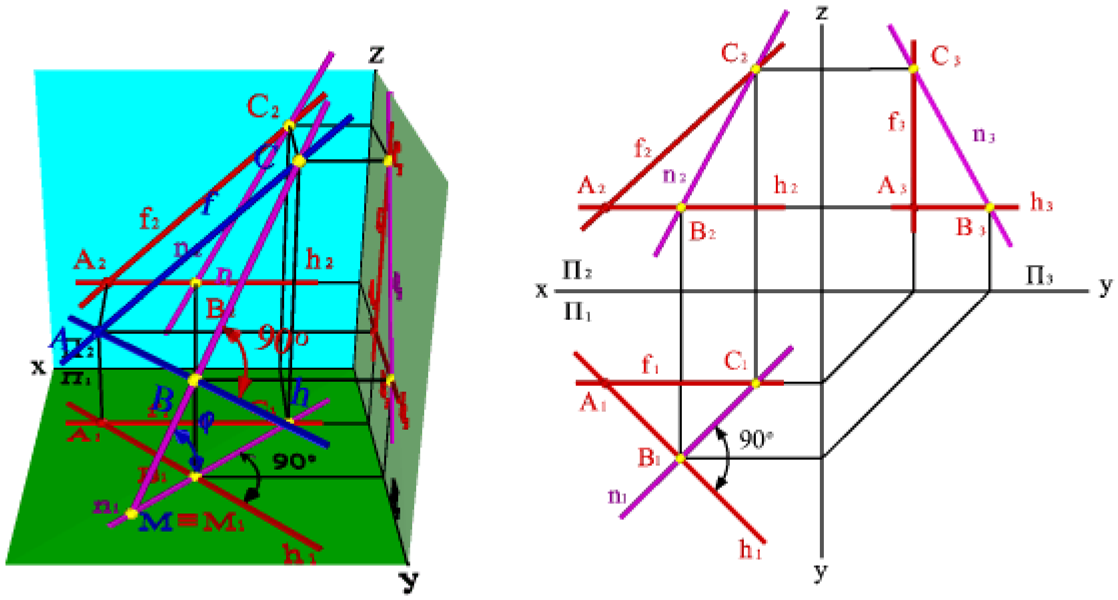


а) модель б) эпюр

Рисунок 5.18. Профильная прямая

Следует заметить, что следы плоскости можно отнести тоже к главным линиям. Горизонтальный след - это горизонталь плоскости, фронтальный - фронталь и профильный - профильная линия плоскости.

4. ***Линия наибольшего ската*** и её горизонтальная проекция образуют линейный угол **φ** , которым измеряется двугранный угол, составленный данной плоскостью и горизонтальной плоскостью проекций (рис.5.19).



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.19. Линия наибольшего ската

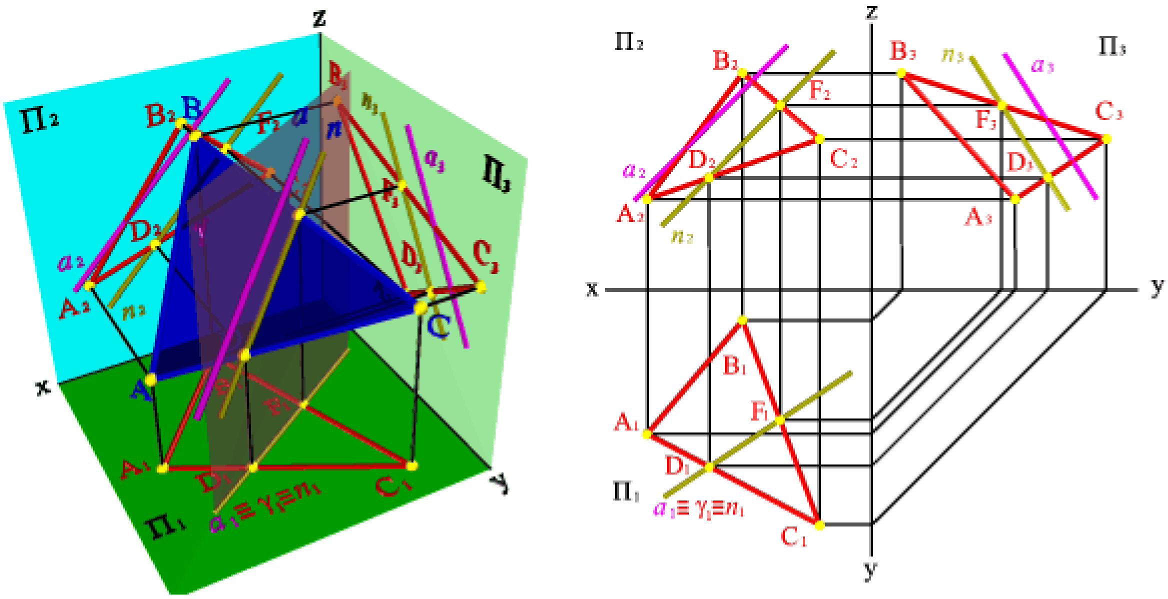
Очевидно, что если прямая не имеет двух общих точек с плоскостью, то она или параллельна плоскости, или пересекает ее.

Прямая линия, параллельная плоскости

При решении вопроса о параллельности прямой линии и плоскости необходимо опираться на известное положение стереометрии: ***прямая параллельна плоскости, если она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости не принадлежит этой плоскости***.

Задача. Дано: проекции плоскости общего положения ***ABC*** и прямой общего положения ***a***.

Требуется оценить их взаимное положение (рис.5.20).



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.20. Прямая параллельная плоскости

Для этого через прямую ***a*** проведем вспомогательную секущую плоскость γ - в данном случае горизонтально проецирующая плоскость. Найдем линию пересечения плоскостей γ и ABC- прямую ***n*** (***DF***). Проекция прямой ***n*** на горизонтальную плоскость проекций совпадает с проекцией a_1 и со следом плоскости γ. Проекция прямой n_2 параллельна $\mathbf{a}_2$, n_3 параллельна $\mathbf{a}_3$, следовательно, прямая **a** параллельна плоскости ***ABC.***

Прямая линия, пересекающая плоскость

Нахождение точки пересечения прямой линии и плоскости – основная задача начертательной геометрии.

Задача. Дано: плоскость ABC и прямая ***a.***

Требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью и определить видимость прямой по отношению к плоскости.

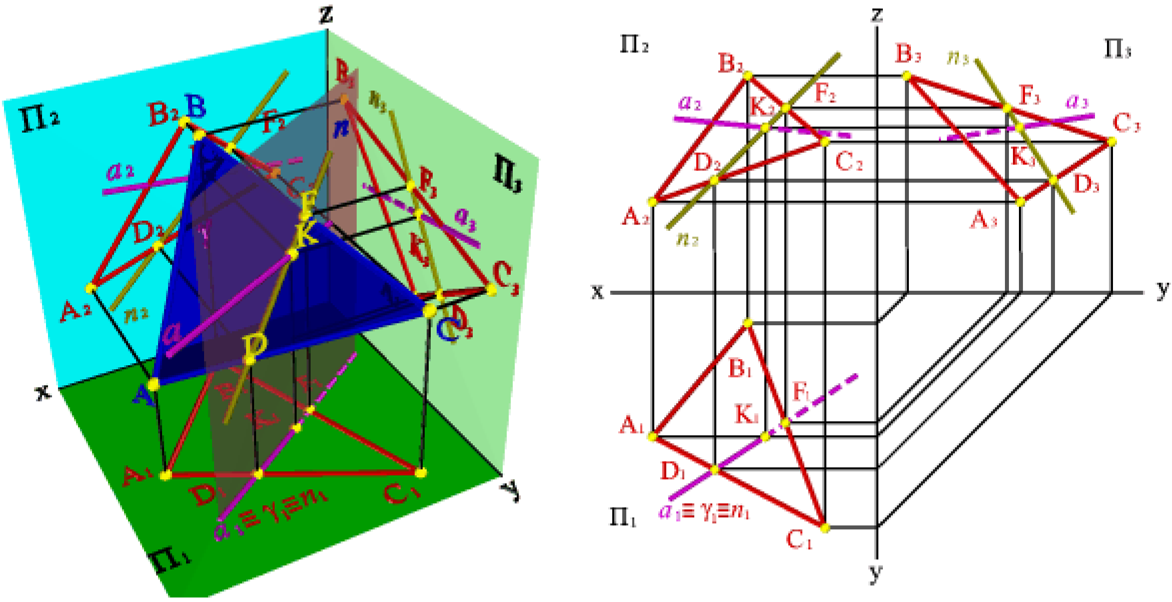
Для решения задачи:

1. Через горизонтальную проекцию прямой a_1 проведем вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость γ (таким образом $a\ \gamma \in$).

2. Горизонтальный след плоскости γ_1 пересекает проекцию плоскости $A_1B_1C_1$ в точках D_1 и F_1, которые определяют положение горизонтальной проекции n_1- линии пересечения плоскостей γ и ABC. Для нахождения фронтальной и профильной проекции n спроецируем точки D и F на фронтальную и профильную плоскости проекций.

3. На фронтальной и профильной проекциях линия пересечения плоскостей n пересекает проекции **a** в точке K, которая и является проекцией точки пересечения прямой **a** с плоскостью ABC, по линии связи находим горизонтальную проекцию K_1.

4.Методом конкурирующих точек определяем видимость прямой **а** по отношению к плоскости ***АВС***.



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.21. Нахождение точки пересечения прямой и плоскости

Таким образом алгоритм решения задачи состоит из следующей последовательности действий (рис.5.21):

1. Построение вспомогательной секущей плоскости γ (горизонтально – проецирующая плоскость), которую проводят через прямую ***а*** $(a) \in \gamma$;

2. Построение линии пересечения вспомогательной плоскости γ и заданной плоскости α: $\gamma \cap \alpha = (n)$;

3. Определение искомой точки ***К***, как точки пересечения двух прямых, заданной - ***а*** и полученной в результате пересечения плоскостей – ***n*** ($K = a \cap n$). В качестве вспомогательной плоскости γ рекомендуется брать одну из проецирующих плоскостей.

4. Определение видимости прямой ***а*** относительно плоскости α.

Прямая линия перпендикулярная плоскости.

Докажем следующую теорему о перпендикуляре к плоскости: ***Если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция этой прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция – фронтальной проекции фронтали плоскости.***

Пусть прямая ***n,*** перпендикулярная плоскости**,** пересекает плоскость ***BCD*** в точке ***N***, тогда по условию ***n*** перпендикулярна любой прямой плоскости. Проведем в плоскости ***BCD*** горизонталь ***h***, а на основании теоремы о проецировании прямого угла можно утверждать, что на горизонтальную плоскость проекций они проецируются под прямым углом, т.е. $n_1 \perp h_1$. Аналогично для фронтали – $f \perp n \Rightarrow f_2 \perp n_2$.

Справедливо и обратное утверждение: ***Если проекции прямой перпендикулярны одноименным проекциям соответствующих главных линий плоскости (горизонтали и фронтали), то такая прямая перпендикулярна плоскости.***

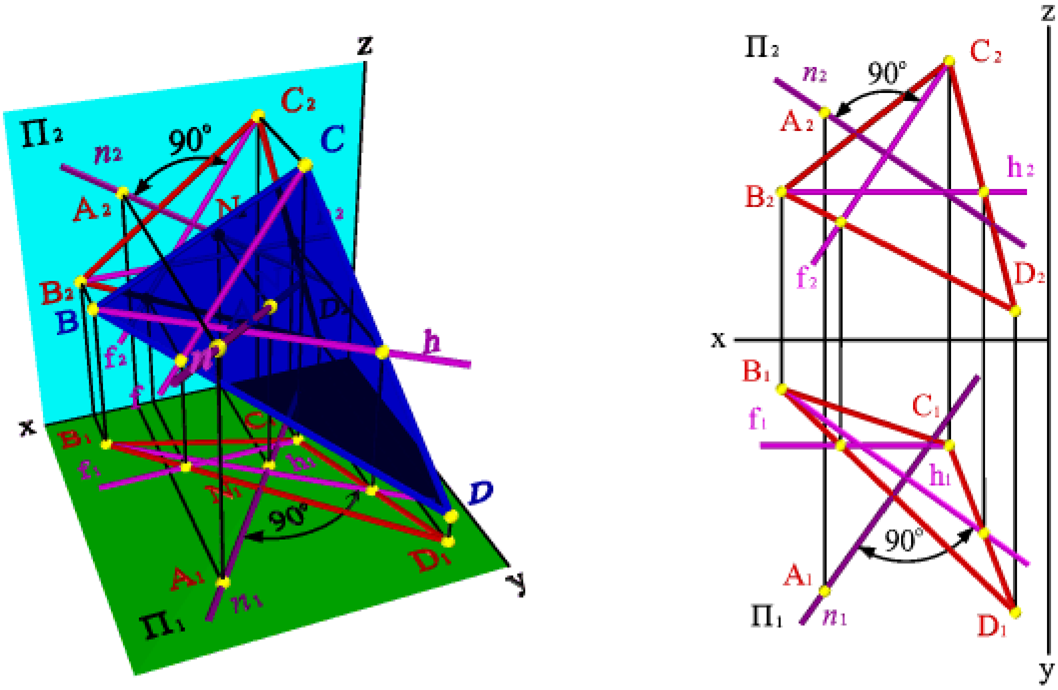
Доказательство следует из теоремы о проецировании прямого угла.

Исходя из рассмотренных теорем, можно решить задачу о построении перпендикуляра к плоскости из точки ***А*** (рис.5.22).

Задача. Дано: плоскость ***BCD*** и точка ***А.***

Требуется построить прямую линию ***n*** проходящую через точку ***А*** и перпендикулярную плоскости ***BCD***.

В плоскости ***BCD*** построим фронталь ***f*** и горизонталь ***h***. В горизонтальной плоскости проекций проведем через точку A_1 прямую n_1 перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1, а на фронтальной плоскости проекций через точку A_2 прямую n_2 перпендикулярно фронтальной проекции фронтали f_2, согласно выше сказанному полученная прямая ***n*** будет перпендикулярна плоскости ***BCD***.



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.22. Построение прямой, перпендикулярной плоскости

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ И ПЛОСКОСТИ

Возможны два варианта взаимного расположения точки и плоскости: либо точка принадлежит плоскости, либо нет.

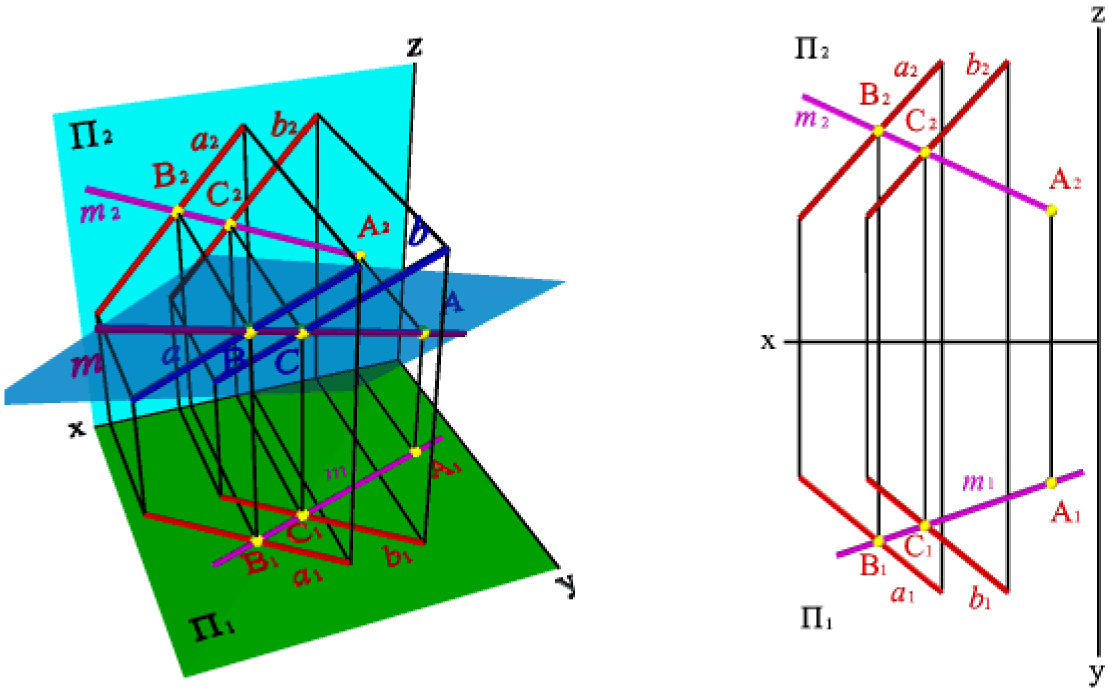
Если точка принадлежит плоскости то из трех проекций, определяющих положение точки в пространстве, произвольно задать можно только одну.

Рассмотрим пример (рис.5.23): Построение проекции точки ***A*** принадлежащей плоскости общего положения заданной двумя параллельными прямыми $\alpha(a//b)$.

Задача. Дано: плоскость $\alpha(a,в)$ и проекция точки A_2.

Требуется построить проекцию A_1 если известно, что точка ***A*** лежит в плоскости ***в,а***.

Через точку A_2 проведем проекцию прямой m_2, пересекающую проекции прямых a_2 и b_2 в точках C_2 и B_2 $(C,\alpha\in B\alpha\in \Rightarrow m\alpha\in)$. Построив проекции точек C_1 и B_1, определяющие положение m_1, находим горизонтальную проекцию точки ***A*** $(A_1\in m_1, m\alpha\in \Rightarrow A\alpha\in)$.



а) модель б) эпюр

Рисунок 5.23. Точка, принадлежащая плоскости

Через точку $\boldsymbol{A_2}$ проведем проекцию прямой $\boldsymbol{m_2}$, пересекающую проекции прямых $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{b_2}$ в точках $\boldsymbol{C_2}$ и $\boldsymbol{B_2}$ ($\boldsymbol{C\in,\alpha B\Rightarrow\alpha\in m\alpha\in}$). Построив проекции точек $\boldsymbol{C_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$, определяющие положение $\mathbf{m_1}$, находим горизонтальную проекцию точки $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A_1\in m_1, m \Rightarrow\alpha\in A\alpha\in}$).